DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2009.03.001

第27卷 第3期 江西科学 Vol.27 No.3
2009年 6月 JIANGXI SCIENCE Jun.2009

文章编号:1001-3679(2009)03-0325-03

一个包含F.Smarandache函数的复合函数

刘 华,吕松涛

(商丘师范学院数学系,河南 商丘 476000)

摘要:对任意正整数n,著名的F.Smarandache LCM函数SL(n)定义为最小的正整数k使得$n|[1,2,\cdots,k]$,其中$n|[1,2,\cdots,k]$表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数。而函数Z(n)定义为最小的正整数k使得$n\leq\frac{k(k+1)}{2}$,即$Z(n)=\min\{k: n\leq\frac{k(k+1)}{2}\}$,主要目的是利用初等及解析方法研究复合函数SL(Z(n))的均值性质,得到了一个有趣的渐近公式。

关键词:F.Smarandache LCM函数;复合函数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

A Composite Function Involving the F.Smarandache Function

LIU Hua,LV Song-tao

(Department of Mathematics,Shangqiu Normal College,Henan Shangqiu 476000 PRC)

Abstract:For any positive integer n,the famous F.Smarandache LCM function SL(n) is defined as the smallest positive integer k such that $n|[1,2,\cdots,m]$, where $n|[1,2,\cdots,k]$ denote the least common multiplies of $1,2,\cdots,k$.And the function Z(n) is defined as the smallest positive integer k such that $n\leq\frac{k(k+1)}{2}$. That is, $Z(n)=\min\{k: n\leq\frac{k(k+1)}{2}\}$. The main purpose of this paper is using the elementary methods and the analytic methods to study the mean value properties of the composite function SL(Z(n)), and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words:F.Smarandache LCM function,Composite function,Mean value,Asymptotic formula

1 引言及结论

著名的F.Smarandache LCM函数SL(n)是由美籍罗马尼亚著名的数论专家F.Smarandache教授在文献[1]中引入的,对于任意的正整数n,SL(n)定义为最小的正整数k使得$n|[1,2,\cdots,k]$,其中,$n|[1,2,\cdots,k]$表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数,即$SL(n)=\min\{k: n|[1,2,\cdots,k]\}$,例如SL(1)=1,SL(2)=2,SL(3)=3,SL(4)=4,SL(5)=5,SL(6)=3,SL(7)=7,SL(8)=8,SL(9)=9,SL(10)=5,…。而函数Z(n)定义为最小的正整数k使得$n\leq\frac{k(k+1)}{2}$,即为$Z(n)=\min\{k: n\leq\frac{k(k+1)}{2}\}$。它是由罗马尼亚著名的数论专家Jozsef Sandor教授在文献[2]中引入的。由SL(n)的定义容易推出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是n的标准分解式,那么

收稿日期:2009-04-02;修订日期:2009-05-15

作者简介:刘 华(1982-),女,河南商丘人,研究方向:数论。

基金项目:河南省科技厅自然科学研究计划项目(092300410141)。

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_r^{\alpha_r}\} \qquad (1)$$

通常称函数 $SL(n)$为 F. Smarandache LCM函数, F. Smarandache教授在文献[2]中提出它的定义,并建议人们研究它的各种性质,而且许多学者对这一提议非常感兴趣并通过研究取得了一系列的成果。例如文献[3]证明了如果 n是一个素数,那么 $SL(n)=S(n)$,这里 $S(n)$是 F. Smarandache函数,即 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$,同时文献[3]中还提出了下面的问题

$$SL(n)=S(n), \quad S(n)\neq n? \qquad (2)$$

文献[4]完全解决了这个问题,并证明了下面的结论:任何满足式(2)的整数可表示为 $n=12$或 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$,其中 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_r, p$是不同的素数且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_r$是满足 $p>p_i^{\alpha_i}$ $(i=1, 2, \cdots)$的正整数。

此外文献[5]研究了 $SL(n)$的均值问题,证明了对任意给定的正整数 k及任意实数 $x>2$有渐近公式

$$\sum_{n\le x} SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中, c_i $(i=2, 3, \cdots)$为可计算的常数。

文献[6]中还研究了 $SL(n)-S(n)$的均值分布问题,证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(SL(n)-S(n))^2=\frac{2}{3}\zeta\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中, $\zeta(s)$是 Riemann zeta函数, c_i $(i=1, 2, \cdots, k)$是可计算的常数。

本文的主要的目的是研究一个包含 F. Smarandache LCM函数 $SL(n)$与 $Z(n)$函数的复合函数 $SL(Z(n))$的均值问题,并获得了一个较强的渐近公式,具体说来是下面的证明。

定理:设 $k\ge 2$为给定的整数,则对任意实数 $x>1$,有渐近公式:

$$\sum_{n\le x} SL(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中, b_i $(i=2, 3, \cdots, k)$为可计算的常数。特别地当 $k=1$时有下面简单的。

推论:对任意实数 $x>1$,有渐近公式:

$$\sum_{n\le x} SL(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

2 定理的证明

这节用初等及解析方法直接给出定理的证明。事实上

$$\sum_{n\le x} SL(Z(n)) \qquad (3)$$

式(3)中注意到如果 $Z(n)=m$,那么当 $\frac{m(m-1)}{2}\le n\le\frac{m(m+1)}{2}$时都有 $Z(n)=m$。也就是说方程 $Z(n)=m$有 m个解 $n=\frac{m(m-1)}{2}+1, \frac{m(m-1)}{2}+2, \cdots, \frac{m(m+1)}{2}$。由于 $n\le x$,所以由文献[1]知当 $Z(n)=m$, m满足 $1\le m\le\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$。于是注意到 $SL(n)\le n$有

$$\sum_{n\le x} SL(Z(n))=\sum_{n\le x, Z(n)=m} SL(m)=\sum_{m\le\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}} mSL(m)+O(x)=\sum_{m\le\sqrt{2x}} mSL(m)+O(x) \qquad (4)$$

现在将所有整数 $1\le m\le\sqrt{2x}$分为 2个集合 A与 B,其中集合 A包含所有的正整数 $m\in[1, \sqrt{2x}]$满足:存在 1个素数 p使得 $p|m$并且 $p>\sqrt{m}$;而集合 B包含区间 $[1, \sqrt{2x}]$中不属于集合 A的那些正整数。于是利用式(1)有

$$\sum_{m\le\sqrt{2x}} m\cdot SL(m)=\sum_{m\in A} m\cdot SL(m)+\sum_{m\in B} m\cdot SL(m)$$

现在计算集合 A的情况:

$$\sum_{m\in A} m\cdot SL(m)=\sum_{\substack{m\in A\\ p|m, \sqrt{m}<p}} m\cdot SL(m)=\sum_{\substack{mp\le\sqrt{2x}\\ m<p}} m\cdot SL(m)$$

$$=\sum_{mp\le\sqrt{2x}, m<p} mp\cdot p=\sum_{m\le\sqrt[4]{2x}} m\cdot\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{2x}}{m}} p^2 \qquad (5)$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x} 1$。于是利用 Abel求和公式(参阅文献[7]中定理 4.2)、分部积分法以及素数定理(参阅文献[8]第三章定理 2):

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中, c_i $(i=1, 2, \cdots, k)$为常数且 $c_1=1$。有

$$\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{2x}}{m}} p^2=\frac{2x}{m^2}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)-m^2\cdot\pi(m)-\int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{m}} 2y\pi(y)dy=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right) \qquad (6)$$

其中，a_i为可计算的常数。注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，并结合式(5)及式(6)可得：

$$\sum_{n\in A} SL(Z(n)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}\sum_{m\le\sqrt[4]{2x}}\frac{1}{m^2} + \sum_{m\le\sqrt[4]{2x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^2\cdot\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) = \frac{\sqrt{2x}}{m}\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right) - m^2\pi(m) - \int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{m}} 2y\pi(y)\,dy = \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^k\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) \quad (7)$$

其中，b_i为可计算的常数。

现在讨论集合B中的情况，由式(1)及集合B的定义知对任意$m\in B$，当m的标准分解式为$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$时有

$$\sum_{n\in B} m\cdot SL(m) = \sum_{m\le\sqrt{2x},\ SL(m)=p,\ p<\sqrt{2x}} m\cdot p + \sum_{m\le\sqrt{2x},\ SL(m)=p^{\alpha},\ \alpha>1} mp^{\alpha} \ll \sum_{m\le\sqrt{2x},\ SL(m)=p,\ p\le\sqrt{2x}} mp + \sum_{2\le\alpha\le\frac{1}{2}\ln(2x)}\sum_{p\le\sqrt{2x}}\sum_{mp^{\alpha}\le\sqrt{2x}} mp^{2\alpha} \ll \sum_{m\le\sqrt{2x}} m\sum_{p\le\min\left(m,\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)} p + \sum_{2\le\alpha\le\frac{1}{2}\ln(2x)}\sum_{m\le\sqrt{2x}} m\sum_{p\le\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} p \ll x^{\frac{5}{4}} + x\ln^2(2x) \ll 2x^{\frac{5}{4}} \ll x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}. \quad (8)$$

综合上述讨论可以得到

$$\sum_{n\le x} SL(Z(n)) = \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

即

$$\sum_{n\le x} SL(Z(n)) = \sum_{m\le\sqrt{2x}} m\cdot SL(m) + O(x) = \sum_{n\in A} m\cdot SL(m) + \sum_{n\in B} m\cdot SL(m) = \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) \quad (9)$$

其中，b_i为可计算的常数。

结合以上各种情况就完成了定理的证明。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Sandor Jozsef. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[3] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[4] Le M H. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[5] Lv Zhong-tian. On the F. Smarandanche LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[6] Jian Ge. Mean value of F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[7] Apostol Tom M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[8] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.